



TITLE:

# 自己混合性を持つ近傍族の Poisson法則(低次元力学系とその 周辺)

AUTHOR(S):

平田, 雅樹

---

CITATION:

平田, 雅樹. 自己混合性を持つ近傍族のPoisson法則(低次元力学系とその周辺). 数理解析研究所講究録 1996, 938: 60-74

ISSUE DATE:

1996-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/60068>

RIGHT:

## “自己混合性”を持つ近傍族の Poisson 法則

都立大・理 平田 雅樹 (Masaki Hirata)

### § 1. 序及び問題設定

Sinai は量子カオスに関する論文 [2] の中で次のような  
2次元トーラス  $\mathbb{T}^2 = [0, 1] \times [0, 1]$  上の斜積変換  $T_\alpha$  ( $\alpha$  は定数)

$$T_\alpha(x, y) = (x + \alpha, x + y) \pmod{1}$$

による力学系を考へ、 $\eta\varepsilon$  の水平領域

$$U_\varepsilon = \{(x, y) : |y| \leq \varepsilon\}$$

から出発した点の軌道  $\{T_\alpha^n(x, y)\}_{n=0}^\infty$  の  $U_\varepsilon$  への再帰時  
間について考察した。  $U_\varepsilon$  上の確率測度として規格化し  
た Lebesgue 測度  $\varepsilon$  とし、確率変数  $\zeta_\varepsilon(x, y)$  :

$$\zeta_\varepsilon(x, y) = \#\{0 \leq n \leq \frac{1}{\varepsilon} : T_\alpha^n(x, y) \in U_\varepsilon\}$$

を考へる。 Sinai は a.e.  $\alpha$  に対して、  $\zeta_\varepsilon$  の  $\varepsilon \rightarrow 0$  の  
極限分布として Poisson 分布が現われると予想した。こ  
の予想は現在までのところまだ未解決であるが、計算機の  
数値実験の結果などから正しいものと考えられている。

Sinai の問題は、もともとは、物理で kicked rotator model と呼ばれる - 次元 Schrödinger 方程式で記述される量子系の準エネルギーの間隔分布について (kick の効果  $\rightarrow 0$  の極限で) Poisson 分布が現われるという理論物理学での予想も数学的に正当化するという試みの過程で考察されたものであるが、(詳しくは [2] を参照)、この Sinai の予想が正しいければ純粋に力学系理論の立場から見ても大変興味深い現象である。何故なら、力学系の理論に於いて、再帰時間については Poincaré の再帰定理や角谷 - Ambrose 理論など基本的なもの以外にあまり知られていないものが多く、特にその分布についてはあまり考察されていないからである。また Sinai は、この Poisson 分布の現れ方は、通常確率論における Poisson 分布の現れ方と異なるものである可能性を示唆しており、この点も興味深い。

そこで問題を次のように一般化して設定し、考察することとする。

$X$  をコンパクト距離空間、 $F: X \rightarrow X$  を連続写像、 $\mu$  を  $X$  上の  $F$ -不変な Borel 確率測度とする。  $z \in X$  を固定し、 $U_\varepsilon(z)$  を  $z$  の  $\varepsilon$ -近傍 (以下  $U_\varepsilon$  と略記する) とする。 $U_\varepsilon(z)$  上の確率測度として、 $\mu$  を  $U_\varepsilon$  に制限して正規化し

た測度  $\mu_\varepsilon$  を、つまり、

$$\mu_\varepsilon = \mu|_{U_\varepsilon} / \mu(U_\varepsilon)$$

と定める。

Poincaré の再帰定理より、 $\overbrace{x \in U_\varepsilon}^{\text{a.e.}}$  の軌道  $\{F^i x\}_{i=0}^\infty$  は  $U_\varepsilon$  に無限回戻り、くくることが出来るが、そこで  $k$  回再帰時間  $T_\varepsilon^{(k)}: U_\varepsilon \rightarrow \mathbb{N}^+$  と次のように定義する。

$$T_\varepsilon^{(1)}(x) = T_\varepsilon(x) = \inf \{i \in \mathbb{N}^+; F^i x \in U_\varepsilon\}$$

$$T_\varepsilon^{(k)}(x) = T_\varepsilon(x) + T_\varepsilon(F^{T_\varepsilon^{(1)}(x)} x) + \cdots + T_\varepsilon(F^{T_\varepsilon^{(k-1)}(x)} x) \quad (k \geq 2)$$

もし、 $\text{a.e. } x$  に対し  $T_\varepsilon^{(k)}(x) \rightarrow \infty$  ( $\varepsilon \downarrow 0$ ) であるから

正規化した再帰時間:

$$c_\varepsilon T_\varepsilon^{(k)} \quad \text{ただし} \quad c_\varepsilon = 1/E_{\mu_\varepsilon}(T_\varepsilon)$$

を考へることとする。そこで問題は次のようになる。

### 問題

$c_\varepsilon T_\varepsilon^{(k)}$  の  $\varepsilon \rightarrow 0$  での極限分布は向になるか?

また、次のように考へれば、確率過程の問題として考へることも出来る。まず、Counting 測度 ( $\mathbb{N}^+$ -値ラシヤン測度)  $\gamma_{\varepsilon, x}$  ( $x \in U_\varepsilon$  は固定) :

$$\gamma_{\varepsilon, x} = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{c_\varepsilon T_\varepsilon^{(k)}(x)}$$

を導入する。ただし、 $\delta_p$  は  $p \in \mathbb{R}^+$  における Dirac の  $\delta$ -測度とする。このとき、 $\gamma_{\varepsilon, \cdot}$  は  $\mathbb{R}^+$  上の点過程となる。

そこで、問題は、

問題 :  $Y_\varepsilon$  の  $\varepsilon \rightarrow 0$  での極限は何か？

ということになる。もちろん、系に何らかの条件を付けなければ、この問題に答えることはできないが、ある条件の下では、 $Y_\varepsilon$  の  $\varepsilon \rightarrow 0$  での極限として Poisson 点過程が現れることがわかる。以下、その条件と結果について、述べていくこととする。

## §2 “自己混合性”条件と Poisson 法則

Sinai の考えた斜積変換による力学系は、 $\alpha$  が無理数の場合、エルゴード性は持つが、混合性は持たない。しかし、系がある意味で強い“カオス的”条件を満たせば、先の問題の答えとして、Poisson 点過程となることが期待できる。実際、Axiom A 系などに対しては、既に結果が得られている。ただし、ここで確率測度としては、リプシッツが連続なポテンシャルに対する平衡測度とする。(cf. [3], [5], etc.) しかし、Axiom A 系は大変強い混合性を持つ系であり(弱 Bernoulli ; correlation が指数的に減少する)、その証明方法をより混合性の弱い力学系に対して直接応用することはできない。

ところで、Sinai の例を観察すると、 $T_\alpha^{-n} U_\varepsilon \cap U_\varepsilon$  は

$\nu_\varepsilon$  とほぼ均等に交わり、 $T_\varepsilon^{-n} \nu_\varepsilon \cap \nu_\varepsilon$  の測度は  $\nu_\varepsilon$  の測度の 2 乗に等しい。」ということがわかる。従って、系が弱 Bernoulli にほど強い混合性を持たなくとも、 $\nu_\varepsilon$  上に制限して見たとき何らかの“混合的”条件を持つれば、Axiom A 系の場合と同様な結果が期待できる。そこで、ここでは次のような条件を満たす系を考察することにする。

力学系  $(X, F, \mu)$  は有限生成分割を持ち、 $\mu$ -混合性を持つとする。また、 $\nu_\varepsilon$  が次の 2 つの条件を満たすと仮定する。(こゝとす、“自己混合性”を持つと呼ぶ。)

$$(C.1) \quad \exists c > 0, \forall \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$$

$$\mu(F^{-i} \nu_\varepsilon \cap \nu_\varepsilon) \leq c \mu(\nu_\varepsilon)^2$$

$$(C.2) \quad N_\varepsilon := \inf \{ i \in \mathbb{N}^+ ; \mu(F^{-i} \nu_\varepsilon \cap \nu_\varepsilon) > 0 \}$$

$$N_\varepsilon \cdot \mu(\nu_\varepsilon) \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$$

こゝで、(C.2) は  $\nu_\varepsilon$  が再び  $\nu_\varepsilon$  と交わるまでの時間がどれほど長くないことを保証する条件である。

注：Axiom A 系は力学系として自身が強い混合性を持つ場合には、ほとんど全ての点  $x \in X$  について“自己混合性”の条件を満たす。ただし、周期点などはこの条件を満たさない例外点である。(実際、周期点の近傍については (C.1) の条件が崩れる。)

さて、以上のような場合、次の定理が成り立つ。

### 定理 (Poisson 法則)

$z \in X$  の近傍が“自己混合性”を満たすとする。このとき、規格化した再帰時間の作る点過程  $Y_\varepsilon$  の  $\varepsilon \rightarrow 0$  の極限は (有限次元分布の意味で) Poisson 点過程となる。つまり、任意の  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{R}^+$  上の任意の disjoint な Borel 集合  $B_1, \dots, B_n$ , 任意の非負整数  $k_1, \dots, k_n$  に対し、次式が成立する:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_\varepsilon(\{x; Y_{\varepsilon, x}(B_1) = k_1, \dots, Y_{\varepsilon, x}(B_n) = k_n\}) \\ = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda(B_i)^{k_i}}{k_i!} e^{-\lambda(B_i)} \end{aligned}$$

ここで、 $\lambda$  は Lebesgue 測度。

以下の節でこの定理の証明の概略を述べる。§3 では、その準備として、道具となる Perron - Frobenius 作用素  $R_\omega$  と  $\omega$  を振動した作用素とその性質を述べ、§4 で規格化した (1 回) 再帰時間  $C_\varepsilon T_\varepsilon^{(1)}$  の満たす指数法則,  $R_\omega$  の Poisson 法則について述べる。ただし、今ここで考える力学系は生成分割を持つことを仮定しているので、問題は本質的には  $z \in X$  を含む筒集合  $U_m = \bigcup_m I_m(z)$  ( $z$  を含む  $\bigvee_{i=0}^{m-1} F^{-i} \mathcal{I}$ )

( $\pi$  は生成分割) の元) に対する Poisson 法則を示すことに帰着できる。よって以下では筒集合の場合について説明することとする。

### §3. 準備

$\mu$  に関する  $T$  の Perron - Frobenius 作用素  $L: L^1(\mu) \rightarrow L^1(\mu)$  とは次式で定義される作用素である:

$$\int Lf \cdot g \, d\mu = \int f \cdot g \circ T \, d\mu \quad \text{for } \forall g \in L^\infty(\mu)$$

また、作用素  $E: L^1(\mu) \rightarrow L^1(\mu)$ ,  $\Phi: L^1(\mu) \rightarrow L^1(\mu)$  を次のように定義する:

$$Ef := E_\mu(f | \mathcal{B}_\infty) \quad \mathcal{B}_\infty = \bigcap_{i=0}^{\infty} T^{-i}\mathcal{B}$$

$E \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ : Borel  $\sigma$ -field of  $X$

$$\Phi f := L(f - Ef)$$

今の場合、 $T$  は  $\psi$ -混合的であるから、 $Ef = \int f \, d\mu$  を満たす。作用素  $E$ ,  $\Phi$  が次の性質を満たすことはその定義より簡単にわかる。

補題 1    1)  $E\Phi = \Phi E = 0$     2)  $\Phi^n f = L^n(f - Ef)$

3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Phi^n f\|_{L^1(\mu)} = 0$

さて、 $U_m = U_m(z)$  上の確率測度として

$$\mu_m := M|_{U_m} / \mu(U_m)$$



をとり、また  $k$  回再帰時間  $T_m^{(k)} : U_m \rightarrow \mathbb{N}^+$  を先と同様に以下の式で定義する。

$$T_m^{(1)}(x) = T_m(x) := \inf \{ i \in \mathbb{N}^+ ; F^i x \in U_m \}$$

$$T_m^{(k)}(x) := T_m(x) + T_m(F^{T_m^{(1)}(x)} x) + \cdots + T_m(F^{T_m^{(k-1)}(x)} x)。$$

また、 $z \in X$  の簡集合は“自己混合性”の条件：

$$(C.1) \quad \forall i, m \text{ に対し, } \mu(F^{-i} U_m \cap U_m) \leq C \mu(U_m)^2$$

( $C$  は  $i, m$  に independent な定数)

$$(C.2) \quad N_m := \inf \{ i \in \mathbb{N}^+ ; \mu(F^{-i} U_m \cap U_m) > 0 \} \text{ により}$$

$$N_m \cdot \mu(U_m) \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty)$$

を満たすとして仮定する。

まず考えようべきことは、規格化した再帰時間  $C_m T_m$  (ただし  $C_m = 1/E_{\mu_m}(T_m)$ ) の  $m \rightarrow \infty$  での極限分布である。

角谷 - Ambrose 理論より  $C_m = \mu(U_m)$  と仮定することに注意す

れば、 $C_m T_m$  の Laplace 変換  $\varphi_m(x)$  は、次の様になる。

$$\begin{aligned} \varphi_m(x) &= \int e^{-x C_m T_m} d\mu_m \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} e^{-x \mu(U_m)} \mu_m(T_m = i) \end{aligned}$$

さて、 $\varphi_m(x)$  の  $m \rightarrow \infty$  の極限を計算するため、Perron-Frobenius 作用素  $\mathcal{L}$  を擾動した作用素  $\tilde{\mathcal{L}}_m : L^1(\mu) \rightarrow L^1(\mu)$  :

$$\tilde{\mathcal{L}}_m f := \mathcal{L}(1_{U_m^c} \cdot f)$$

すなわち  $1_{U_m^c}$  は  $U_m$  の補集合  $\times$  定義関数

を導入する。  $\tilde{L}_m$  による 2 次の補題が成立する。

補題 2  $i \geq 1$  に対し

$$\mu_m(T_m = i) = \int \tilde{L}_m^{i-1} 1 - \tilde{L}_m^i 1 \, d\mu_m.$$

証明)  $L$  の定義、及び  $L1 = 1$  に注意すれば、単純な計算により、この等式が得られる。 //

補題 3  $i \geq 1$  に対し、

$$\tilde{L}_m^i 1 = \lambda_m^i - \lambda_m^{i-1} \sum_{k=0}^{i-1} \lambda_m^{-k} \tilde{L}_m^k \bar{U} 1_{U_m}$$

$$\text{ここで、 } \lambda_m := 1 - \mu(U_m).$$

証明)  $i=1$  のときは、

$$\tilde{L}_m 1 = L(1_{U_m^c}) = 1 - L(1_{U_m}) = 1 - (E1_{U_m} + \bar{U}1_{U_m}) = \lambda_m - \bar{U}1_{U_m}$$

あとは、この関係式を用いて帰納法で示せばよい。 //

ここで、

$$\varphi(t) := \sum_{i=1}^{\infty} t^i \mu_m(T_m = i)$$

と定義すれば、  $\varphi_m(x) = \varphi(e^{-x\mu(U_m)})$  であるが、先の補題 1, 補題 2 を用いれば、  $\varphi(t)$  は次のように分解できる：

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= t + (t-1) \sum_{i=1}^{\infty} t^i \lambda_m^i \\ &\quad - (t-1) \sum_{i=1}^{\infty} t^i \lambda_m^{i-1} \sum_{k=0}^{i-1} \lambda_m^{-k} \int \tilde{L}_m^k \bar{U} 1_{U_m} \, d\mu_m. \end{aligned}$$

より、上式に  $t = e^{-x\mu(U_m)}$  を代入し、  $m \rightarrow \infty$  での極限を計算することにより、  $C_m T_m$  の極限分布を知ることが出来る。

## §4. Poisson 法則の証明

まず、 $C_m T_m$  の極限分布について次の定理が成り立つ。

定理3. (指数法則)

$\pi \in X$  が“自己混合性”条件 (C.1), (C.2) を満たすとき、規格化した再帰時間  $C_m T_m$  の  $m \rightarrow \infty$  での極限分布が存在し、それは、パラメータ 1 の指数分布となる。

この定理は、 $\varphi_m(x) = \varphi(e^{-x\mu(u_m)}) \rightarrow \frac{1}{1+x} \quad (m \rightarrow \infty)$  を示せば、 $\frac{1}{1+x}$  がパラメータ 1 の指数分布の Laplace 変換であることから証明される。よって次に、

$$I(t) := t + (t-1) \sum_{i=1}^{\infty} t^i \lambda_m^i = t + (t-1) \frac{t \lambda_m}{1-t \lambda_m}$$

$$II(t) := (t-1) \sum_{i=1}^{\infty} t^i \lambda_m^{i-1} \sum_{k=0}^{i-1} \lambda_m^{-k} \int \tilde{L}_m^k \bar{\pi} 1_{U_m} d\mu_m$$

とみれば、

$$I(e^{-x\mu(u_m)}) \rightarrow \frac{1}{1+x} \quad (m \rightarrow \infty)$$

は直ちに示せるが、

$$II(e^{-x\mu(u_m)}) \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty)$$

は、以下の補題から導かれる。

補題4.

$$II(t) = \frac{(t-1)^2}{\mu(u_m)(1-t\lambda_m)} \sum_{k=0}^{\infty} t^k \int \tilde{L}_m^k \bar{\pi} 1_{U_m} d\mu$$

証明)  $1_{U_m} = 1 - 1_{U_m^c}$  を使えば、

$$\int \tilde{L}_m^k \bar{\pi} 1_{U_m} d\mu_m = \frac{1}{\mu(u_m)} \int 1_{U_m} \cdot \tilde{L}_m^k \bar{\pi} 1_{U_m} d\mu$$

$$= \frac{1}{\mu(U_m)} \int \tilde{L}_m^k \varphi 1_{U_m} - \tilde{L}_m^{k+1} \varphi 1_{U_m} d\mu$$

これに  $\Pi(t)$  の定義式に代入すればよい。 //

次に、 $\int \varphi 1_{U_m} d\mu = 0$  と仮定することに注意して

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} t^k \int \tilde{L}_m^k \varphi 1_{U_m} d\mu &= \sum_{k=1}^{N_m-1} t^k \int \tilde{L}_m^k \varphi 1_{U_m} d\mu \\ &\quad + \sum_{k=N_m}^{\infty} t^k \int \tilde{L}_m^k \varphi 1_{U_m} d\mu \\ &\quad - \mu(U_m) \sum_{k=1}^{\infty} t^k \int \tilde{L}_m^k 1 d\mu \\ &= (i) + (ii) - (iii) \end{aligned}$$

と分割すれば、次の補題が成立。

補題 5:  $N_m := N_m - 1$ ,

$$(i) = (1 - t^{N_m}) \frac{t \mu(U_m)}{1 - t}.$$

証明)  $N_m$  の定義より、 $\int \tilde{L}_m^k \varphi 1_{U_m} d\mu = \mu(U_m)$  ( $k \leq N_m$ )

とあり、これを使えば明らか。 //

また、 $N_m$  の定義から

$$1_{U_m^c} \circ F^{N_m'} \cdots 1_{U_m^c} \circ F \cdot 1_{U_m} = 1_{U_m}$$

であることに注意すれば、(ii) は次の形に書き直せる：

$$\begin{aligned} (ii) &= t^{N_m'} \sum_{k=1}^{N_m'} t^k \int \tilde{L}_m^{N_m'+k} \varphi 1_{U_m} d\mu \\ &\quad + t^{2N_m'} \sum_{k=1}^{\infty} t^k \{ \mu(V_{m,k} \cap U_m) - \mu(V_{m,k}) \mu(U_m) \} \\ &\quad + t^{2N_m'} \mu(U_m) \sum_{k=1}^{\infty} t^k \int \tilde{L}_m^k 1 d\mu \\ &\quad - t^{2N_m'} \sum_{k=1}^{\infty} t^k \sum_{j=1}^{N_m'} \mu(V_{m,k} \cap F^{-N_m'-j} U_m \cap U_m) \end{aligned}$$

$$\text{そこで、 } V_{m,k} = \bigcap_{j=2N_m'+1}^{2N_m'+k} F^{-j} U_m^c.$$

以上の変形は、それほど明らかではないが、変形の過程を  
ここで記すには煩雑すぎるので略する。(詳しくは [4])

また、以上のことから、結局、

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} t^k \int \tilde{L}_m^k \mathbb{1}_{U_m} d\mu &= (1-t^{N'_m}) \frac{t \mu(U_m)}{1-t} \\ &\quad + t^{N'_m} \sum_{l=1}^{N'_m} t^l \int \tilde{L}_m^{N'_m+l} \mathbb{1}_{U_m} d\mu \\ &\quad + t^{2N'_m} \sum_{l=1}^{\infty} t^l \{ \mu(V_{m,l} \cap U_m) - \mu(V_{m,l}) \mu(U_m) \} \\ &\quad - t^{2N'_m} \sum_{l=1}^M t^l \sum_{j=1}^{N'_m} \mu(V_{m,l} \cap F^{-N'_m-j} U_m \cap U_m) \\ &\quad - (1-t^{2N'_m}) \mu(U_m) \sum_{l=1}^{\infty} t^l \int \tilde{L}_m^l \mathbb{1} d\mu \\ &=: a(t) + b(t) + c(t) - d(t) - e(t) \quad (\text{と書く}) \end{aligned}$$

と分解できる。

補題 6:  $\Pi(e^{-\alpha \mu(U_m)}) \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty)$

証明)  $z \in X$  が“自己混合性”条件を満たすことから、

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} a(e^{-\alpha \mu(U_m)}) &= \lim_{m \rightarrow \infty} b(e^{-\alpha \mu(U_m)}) = \lim_{m \rightarrow \infty} d(e^{-\alpha \mu(U_m)}) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} e(e^{-\alpha \mu(U_m)}) = 0 \end{aligned}$$

であることは比較的容易に示せる。また、系が  $\varphi$ -混合性を持つことから、次の評価を得る。

$$|\mu(V_{m,l} \cap U_m) - \mu(V_{m,l}) \mu(U_m)| \leq \varphi(N'_m) \cdot \mu(U_m)$$

ここで、条件 (C.1) より  $N_m \rightarrow \infty \quad (m \rightarrow \infty)$  より、

$\varphi(N_m) \rightarrow 0$  となることがわかり、このことから

$$\lim_{m \rightarrow \infty} c(e^{-\alpha \mu(U_m)}) = 0 \quad \text{も導かれる。} \quad \text{また、}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(e^{-\alpha \mu(U_m)} - 1)^2}{\mu(U_m)(1 - \lambda_m e^{-\alpha \mu(U_m)})} = \frac{\alpha^2}{\alpha + 1} \neq 0$$

であるから、 $\lim_{m \rightarrow \infty} \Pi(e^{-\alpha \mu(U_m)}) = 0$  と得る。 //

以上で定理3の証明は終わった。次に Poisson 法則について考えるが、その前に次の2つの事実注意到しよう。

1).  $\mu_m$  は  $F$  の  $U_m$  上に誘導された変換  $T_m$  の不変測度であることから、任意の  $k \geq 1$  に対して、増分

$$C_m T_m^{(k+1)} - C_m T_m^{(k)}$$

は  $C_m T_m$  と同分布を持つ。

2) 系が  $\psi$ -混合性を持つことから、 $C_m T_m^{(k+1)} - C_m T_m^{(k)}$

の  $m \rightarrow \infty$  での極限分布は、互いに独立である。

以上のことと、定理3より、規格化された再帰時間  $C_m T_m^{(k)}$  の極限分布について次の命題が導かれる。

### 命題7

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mu_m(C_m T_m^{(k)} \leq t \text{ かつ } C_m T_m^{(k+1)} > t) = \frac{t^k}{k!} e^{-t}$$

$\mathbb{R}^+$  上の点過程  $Y_m$  を先と同様に次式で定義する：

$$Y_{m,\cdot} := \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{C_m T_m^{(k)}(\cdot)}$$

このとき、命題7から、次の Poisson 法則が得られる。

命題 8 : 任意の  $n \in \mathbb{N}^+$  及び、任意の disjoint な

Borel 集合  $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$  と任意の非負整数

$k_1, \dots, k_n$  に対し、

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P_m(Y_m(B_1) = k_1, \dots, Y_m(B_n) = k_n) = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda(B_i)^{k_i}}{k_i!} e^{-\lambda(B_i)}$$

ここで  $\lambda$  は Lebesgue 測度。

以上、筒集合についての Poisson 法則について述べてきたが、§2 で述べた  $\varepsilon$ -近傍についての Poisson 法則は、

$U_\varepsilon(\Sigma)$  を筒集合の有限個の和集合でうまく近似することによって示すことができる。この近似の仕方については、

[3] の Section 5 を参照して欲しい。

最後に反例について注意しておく。先に周期点の条件 (C.1) を満たさないことを注意したが、この場合、定理 3 が成立しない。実際、Axiom A 系においては、規格化した再帰時間  $(C_\varepsilon T_\varepsilon^{(1)})$  の  $\varepsilon \rightarrow 0$  での極限分布は、 $\delta$ -分布と指数分布の線型結合となる。

## 参 考 文 献

- [1]. Ya. G. Sinai. Some mathematical problems in the Theory of quantum chaos, *Physica A* 163, 197-204.
- [2]. Ya. G. Sinai. Mathematical problems in the theory of quantum chaos, *Lec. Note in Math.* 1469, 41-59
- [3]. M. Hirata. Poisson law for Axiom A diffeomorphisms, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* (1993), 13, 533-556.
- [4]. M. Hirata. Poisson law for the dynamical systems with the "self-mixing" conditions, *Proc. of the International Conference on Dynam. Sys. and Chaos*, (1995) vol. 1, 87-96. (World Scientific)
- [5]. Pitskel. Poisson limit law for Markov chains, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* (1991), 11, 501-513.